Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 8

Künneth–Formel und Poincaré–Dualität

29. Künneth–Formel für die Kohomologie mit kompaktem Träger.
Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten mit einer endlichen guten Überdeckung. Dann gilt $\mathrm{H}^*_c(M \times N) = \mathrm{H}^*_c(M) \otimes \mathrm{H}^*_c(N)$.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß diese Formel für orientierbare M und N aus der Künneth–Formel für die de Rham Kohomologie und aus der Poincaré–Dualität folgt.

    (b) (2 Punkte) Wenden Sie das Mayer–Vietoris–Argument an, um die Künneth–Formel für beliebige M und N mit einer endlichen Überdeckung zu zeigen.

30. Poincaré–duale Formen
Es seien x, y die Standardkoordinaten und (r, θ) die Polarkoordinaten auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\mathrm{H}^*(M)$ und $\mathrm{H}^*_c(M)$.

    (b) (1 Punkte) Zeigen Sie, daß das Poincaré–Duale des Strahls $\{(x, 0) | x > 0\}$ in M durch $\frac{1}{2\pi} \mathrm{d}\theta \in \mathrm{H}^1(M)$ gegeben ist.

    (c) (1 Punkte) Zeigen Sie, daß das abgeschlossene Poincaré–Duale des Einheitskreises in $H^1(M)$ 0 ist. Zeigen Sie, daß das kompakte Poincaré–Duale hingegen der nichttriviale Erzeuger $\rho(r)\mathrm{d}r \in \mathrm{H}^1_c(M)$ ist, wobei $\rho(r)$ eine Höckerfunktion mit Gesamtintegral 1 ist.

31. Die Kohomologie von T^n.
Es sei $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ der n–Torus mit der Äquivalenzrelation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$ und $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ die kanonische Projektion, cf. Aufgabe 10. Es sei $\sigma_j : S^1 \to T^n, \theta \mapsto \sigma_j(\exp(2\pi i \theta)) = \pi(0, \ldots, \theta, 0, \ldots, 0)$ mit θ an der i–ten Stelle.

    (a) (1 Punkt) Konstruieren Sie Klassen $\alpha_i \in \mathrm{H}^1(T^n)$ so, daß $\int_{S^1} \sigma_i^* \alpha_j = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, daß sie eindeutig durch diese Bedingungen bestimmt sind.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ eine Orientierung auf T^n definiert.

(c) (1 Punkt) Interpretieren Sie die α_i mittels des Künneth–Isomorphismus. Zeigen Sie, daß $\mathrm{H}^*(T^n) \cong \bigwedge^* V$ für einen n–dimensionalen Vektorraum V.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die n–Sphäre und der n–Torus nicht homöomorph sind.

32. Die Kohomologie von $\mathbb{RP}^n$.

(a) (1 Punkt) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit auf der eine Gruppe G frei wirkt, d.h. $G_p = \emptyset, \forall p \in M$. Weiter sei $\pi : M \to M/G$ die kanonische Projektion. Es bezeichne $\Omega^q(M)^G = \{\omega \in \Omega^q(M) | \pi^*\omega = \omega\}$ die G–invarianten Differentialformen auf M. Zeigen Sie, daß $\pi^* : \Omega^q(M/G) \to \Omega^q(M)$ durch $\Omega^q(M)^G$ faktorisiert, und daß $\pi^* : \Omega^q(M/G) \to \Omega^q(M)^G$ ein Isomorphismus ist.

(b) (1 Punkt) Es sei C^* ein Differentialkomplex, auf dem eine endliche Gruppe G wirkt. Zeigen Sie, daß dann G auch auf der Kohomologie $\mathrm{H}^*(C^*)$ wirkt. Zeigen Sie, daß $\mathrm{H}^q(C^{*G}) = \mathrm{H}^q(C^*)^G$, wobei letztere die G–invariante Kohomologie ist.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\mathrm{H}^*(\mathbb{RP}^n)$.

Abgabetermin: Freitag, 25. 6. 2010 um 10:00 Uhr.